EXAMENS DE TOPO+ *CORO*

♀VIVE JOYEUX♀

<¥√€$>

Faite pas trop
attention aux fautes
d'orthographes. La
rédaction reste à
désirer. 😁😁😁
Si jamais vous trouvez
qu'une correction n'est
pas exact, vous
pouvez l'exposer pour
qu'ensemble on
puisse trouver une
solution.
Merci et bonne
chance à nous tous.

Université Nangui Abrogoua **Année : 2018 / 2019**

–Licence 3 Maths *Examen de Topologie ($1^{ère}$ session)* *Durée : 3 h 00*

Le sujet comporte quatre exercices indépendants répartis sur deux pages.

Exercice 1 **(4 points)**

Soit X un ensemble non vide quelconque. On munit X de la topologie grossière.

1. Quels sont les parties fermées de X ?
2. Soit A un sous-ensemble non trivial de X, c'est-à-dire $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$.
   (i) Quel est l'intérieur de A ?
   (ii) Quelle est l'adhérence de A ?
3. Soit x un élément de X. Déterminer l'ensemble des voisinages de x.

Exercice 2 **(4 points)**

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de X, alors on a
$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$
   Donner un exemple montrant que la réciproque n'est pas toujours vraie.
2. Soit A un sous-ensemble non vide de X. On suppose qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que, quels que soient les éléments a et b distincts de A, on ait $d(a, b) \geq \eta$.
   Montrer que (A, d) est un espace complet.

Exercice 3 **(5 points)**

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout g élément de E, on pose
$$\|g\|_1 = \int_0^1 |g(t)|dt.$$

On admettra que l'application $g \mapsto \|g\|_1$ est une norme sur E.

Soit T une application définie sur E telle que pour tout g élément de E on ait

$$T(g)(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad \forall x \in [0,\, 1].$$

1. Montrer que pour tout élément g de E, $T(g)$ appartient à E.
2. Montrer que T est linéaire et continue.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère f_n l'élément de E défini par

$$f_n(x) = ne^{-nx}, \quad \forall x \in [0,\, 1].$$

(i) Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|T(f_n)\|_1$ pour tout entier $n \geq 1$.

(ii) Déterminer la norme de T.

Exercice 4 **(7 points)**

Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et a un élément de X.

Pour tous x et y dans X, on pose :

$$d_a(x,\, y) = d(a,\, x) + d(a,\, y) \quad \text{si } x \neq y \quad \text{et} \quad d_a(x,\, y) = 0 \quad \text{si } x = y.$$

1. Montrer que d_a est une distance sur X.
2. Montrer que pour tout nombre réel $r > 0$, on a $B_{d_a}(a,\, r) = B_d(a,\, r)$. Autrement dit, la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la distance d_a est égale à la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la distance d.
3. Soit x un élément de X tel que $x \neq a$.
   Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $B_{d_a}(x,\, r) = \{x\}$.
4. Soit A une partie de X.
   (i) Montrer que si a n'appartient pas à A, alors A est un ouvert de X pour la distance d_a.
   (ii) On suppose que a est élément de A.
   Montrer que A est un ouvert de X pour d_a si et seulement si A est un voisinage de a pour la distance d.

Université Nangui Abrogoua **Année : 2018 / 2019**

–Licence 3 Maths *Examen de Topologie (session 2)* *Durée : 3 h 00*

–

Le sujet comporte quatre exercices indépendants répartis sur deux pages.

Exercice 1 **(3 points)**

Soit X un ensemble non vide quelconque. On munit X de la topologie discrète.

1. Quels sont les parties fermées de X ?
2. Soit A un sous-ensemble de X.
   (i) Quel est l'intérieur de A ?
   (ii) Quelle est l'adhérence de A ?
3. Soit x un élément de X. Déterminer l'ensemble des voisinages de x.

Exercice 2 **(5 points)**

Soit $(X,\, d)$ un espace métrique.

1. Montrer que toute suite de Cauchy de X qui possède une sous-suite convergente est convergente.
2. En déduire que si $(X,\, d)$ est compact alors $(X,\, d)$ est complet.
   Donner un exemple d'espace métrique complet qui n'est pas compact.
   ($\mathbb{R}$, |·|) est complet mais ($\mathbb{R}$, |·|) n'est pas compact.

Exercice 3 **(4 points)**

Pour tous p, q éléments de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$d(p,\, q) = 0 \;\text{ si }\; p = q \quad \text{et} \quad d(p,\, q) = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \;\text{ si }\; p \neq q.$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{N}^*$ par $f(p) = p + 1$.
   (i) Montrer que si $p \neq q$ alors
   $$d(f(p),\, f(q)) < d(p,\, q).$$
   (ii) Montrer que f n'est pas contractante.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ **(8 points)**

On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On pose, pour $P \in E$,

$$N_1(P) = \sup\{|P(x)| \,:\, x \in [1,\ 2]\}$$

et

$$N_2(P) = \sup\{|P(x)| \,:\, x \in [0,\ 1]\}.$$

On suppose que N_1 est une norme sur E.

On définit sur E l'application Φ par

$$\Phi(P) = P(0).$$

1. Montrer que N_2 est une norme sur E.
2. Montrer que Φ est une forme linéaire continue sur $(E,\ N_2)$.
3. Calculer la norme de Φ.
4. Montrer que Φ n'est pas continue sur $(E,\ N_1)$ (Suppose que Φ continue et on aboutit à une contradiction)

   Indication : Considérer $P_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ? (Justifier votre réponse.)
6. Soit $U = \{P \in E \,:\, P(0) \neq 0\}$.

   (i) Montrer que pour tout $P \in U$, la boule ouverte (par rapport à N_2) de centre P et de rayon $r = |P(0)|$ notée $B_{N_2}(P,\ r)$ est incluse dans U. ?

   (ii) Que peut-on alors dire de U par rapport à $(E,\ N_2)$?

Université Nangui Abrogoua
Année 2019-2020

Durée
2 h 00

Licence 3 de mathématiques

Examen de Topologie (session 1)

Exercice 1 (5 points)
Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $f : E \to E$ une application telle que $f^2 = f \circ f$ est contractante.

1. Traduire à l'aide des quantificateurs l'assertion suivante : f^2 est contractante.
2. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 2 (4 points)
Soient (X, d) un espace métrique et A un sous-ensemble non vide de X. On suppose qu'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que

$$\forall (a, b) \in A \times A \quad a \neq b \Rightarrow d(a, b) \geqslant k.$$

1. Montrer que (A, d) est un espace complet.
2. En déduire que A est un fermé de X.
3. Pour $X = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, déterminer un sous-ensemble non-vide A de $\mathbb{R}$ et un réel $k > 0$ tels que

$$\forall (a, b) \in A \times A \quad a \neq b \Rightarrow d(a, b) \geqslant k.$$

Exercice 3 (4 points)
Soit (X, d) un espace métrique. Un sous-ensemble A de X est dit **précompact** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des boules fermées de rayon ε dont les centres sont des points de A.

1. Montrer que Si X est compact alors il est précompact.
2. En déduire que si A est précompact alors l'adhérence de A notée $\overline{A}$ est précompact.
Indication : On admettra que pour tous sous-ensembles E et F de X, $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$

Exercice 4 (7 points)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Sur E on définit une application $\mathcal{N}$ par

$$\mathcal{N}(P) = \sup_{x \geqslant 0} e^{-x} |P(x)|.$$

On considère l'application $\mathcal{T} : E \to E$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{T}(P)(x) = P(x + 1).$$

1. Montrer que $\mathcal{N}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur E.
3. Montrer que $\mathcal{T}$ est linéaire.
4. Montrer que pour tout P élément de E on a

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}(P)) \leqslant e\mathcal{N}(P).$$

Université Nangui Abrogoua
Année 2019-2020

Durée
2 h 00

Licence 3 de mathématiques

Examen de Topologie (session 2)

On attachera la plus grande rigueur à la rédaction. Chaque réponse devra être soigneusement argumentée. Aucun point ne sera attribué à une réponse seulement partiellement correcte.

Exercice 1 (6 points)

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy alors elle est bornée.
   Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse. ?
2. Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente alors elle est convergente.
3. On suppose à présent que pour tout $x \in E$ et pour tout nombre réel $r > 0$, la boule fermée de centre x et de rayon r est compacte.
   Montrer alors que (E, d) est complet.

Exercice 2 (4 points)

Soient (X, d) un espace métrique et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de X qui converge vers l dans (X, d). Montrer que l'ensemble K ci-dessous est un compact de X :

$$K = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}.$$

Exercice 3 (5 points) (Voir chemin exo 2)

On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'application d définie par

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

1. Montrer d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $r > 0$. Déterminer avec précision la boule ouverte de centre 0 et de rayon r.

$r=1$; $B(0,r) = \mathbb{R}$
$r \in]0,1[$, $B(0,r) =]\frac{r}{-1+r} ; \frac{r}{-r+1}[$
$r > 1$ $B(0,r) = \emptyset$

Exercice 4 (5 points)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 0$. Sur E, on définit les applications N_1 et N_2 par

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|,$$

où f' désigne la dérivée de f.

On admet que N_1 est une norme sur E.

1. Montrer que N_2 est une norme sur E..
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout f appartenant à E,
   $$N_1(f) \leqslant CN_2(f).$$?
3. A l'aide des fonctions f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, montrer que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Université Nangui Abrogoua
Année 2020-2021

Durée
2 h 30

Licence 3 de mathématiques

Examen de Topologie (session 1)

Exercice 1 (6 points)

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^*$, on considère l'application d définie par $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

On admet que $(\mathbb{R}^*, d)$ est un espace métrique.

1. Déterminer, dans $(\mathbb{R}^*, d)$, la boule ouverte de centre $x = 3$ et de rayon $r = 1$.
2. Montrer que $(]0, 1], d)$ est complet.
3. Montrer que $(]0, +\infty[, d)$ n'est pas complet.

Exercice 2 (3 points)

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que si E est compact alors E est complèt.
2. Donner un exemple d'espace métrique complet et non compact.

Exercice 3 (8 points)

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On note $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et $d : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

1. Montrer que d est une distance sur E.
   On admettra dans la suite que (E, d) est complet.
2. Soit $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue et $\phi \in E$. Pour tout $f \in E$ et pour tout $r > 0$, on définit

$$\Phi_r(f)(x) = r \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \phi(x).$$

   a) Montrer que pour tout $r > 0$, Φ_r est à valeurs dans E.
   b) Montrer que pour tout $r > 0$, Φ_r est lipschitzienne.
   c) Pour quelles valeurs de r, Φ_r est-elle contractante ?
   d) En déduire que si r prend l'une des valeurs de la question précédente, l'équation d'inconnue f suivante :

$$\forall x \in [a, b], \ f(x) = r \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$$

   admet une unique solution dans E.

Exercice 4 (3 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie C de E est convexe si pour tout $(x, y) \in C \times C$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$(1 - t)x + ty \in C.$$

Montrer que si C est convexe alors l'adhérence de C est convexe.

Voir Exo 5 du cours sur le chapitre 2 / Topologie d'un EM)

Université Nangui Abrogoua
Année 2020-2021

Durée
2 h 30

Licence 3 de mathématiques

Examen de Topologie (session 2)

Exercice 1 (4 points) (Extrait d'un TD d'analyse 1 à l'UFR SFA)
On considère $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

1. Montrer que l'application f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si g est une application continue sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$
alors g est bornée.

Exercice 2 (5 points)
Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère sur$E \times E$ les applications d et δ définies par
$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \quad \text{et} \quad \delta(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}dx.$$
On admet que d est une distance sur E.

1. Montrer que δ est une distance sur E.
2. Montrer que d et δ sont équivalentes (métriquement).

Exercice 3 (5 points)
Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que toute suite de Cauchy de E est bornée.
2. Montrer que si toute boule fermée de (E, d) est compacte alors (E, d) est complet.

Exercice 4 (6 points)
Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.
On considère l'opérateur Φ définie sur E par
$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [0, 1].$$

1. Montrer que Φ est à valeurs dans E.
2. Montrer que Φ est linéaire et continue.
3. Pour tout entier naturel n, on considère l'éléménet f_n de E définie par $f_n(x) = ne^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\Phi\,(f_n)\,\|$.
4. Déterminer la norme d'opérateur de Φ que l'on notera $|||\Phi|||$.

EXAMEN TOPO 18 – 19 (Session 1)

Soit X un ensemble non vide munit de la topologie grossière.

1) $\emptyset$ et X sont les parties ouverts de X, cela entraine que X et $\emptyset$ sont les parties fermées de X

2) Soit $A \subset X$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$.

i) $A \subset X$ et $A \neq \emptyset \Rightarrow \bar{A} = X$

ii) $A \neq \emptyset$ Donc $\mathring{A} = \emptyset$

3) $\{X\}$ est l'ensemble des voisinages de X.

EXERCICE 2

Soit (X, d) un espace metrique

1) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de cauchy de X.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2;\ p \geq q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon$ alors $n+1 > N_\varepsilon$

donc $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$.

$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$

Exemple.

La suite $(x_n)_{n \geq 1} = \ln(n)$ est une suite de $\mathbb{R}$.

$\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$, Donc x_n ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Par contre $\lim_{n \to +\infty} |\ln(n+1) - \ln(n)| = \lim_{n \to +\infty} \left|\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right| = 0$

2) Soit $A \subset X$ et $A \neq \phi$. On suppose qu'il existe $\eta > 0$ telle que $\forall (a,b) \in A$, $a \neq b$, on a $d(a,b) \geq \eta$.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de cauchy de A.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \; p \geq q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

En particulier, pour $\varepsilon = \eta$

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \; p \geq q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

$\Rightarrow d(x_p, x_q) = 0$

$\Rightarrow x_p = x_q$

$(x_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire. (x_n) converge donc dans (A, d). (A, d) est complet.

$\boxed{\text{EXERCICE 3}}$

$E = C([0,1], \mathbb{R})$.

On pose $\|g\|_1 = \int_0^1 |g(t)| \, dt \quad \forall g \in E$

Soit $T(g)(x) = \int_0^x g(t) \, dt$; $x \in [0,1]$ et $g \in E$

1) $T(g)$ est la primitive de g qui s'annulle en 0. Comme g est continue sur $[0,1]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, $T(g) \in E$.

2) Soient f et $g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall t \in [0,1]$

$$T(\lambda g + f)(x) = \int_0^x (\lambda g + f)(t) \, dt$$

$$= \int_0^x \lambda g(t) + f(t) \, dt$$

$$T(\lambda g + f)(x) = \int_0^x \lambda g(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$$
$$= \lambda \int_0^x g(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$$
$$= \lambda T(g)(t) + T(f)(t)$$

T est lineaire.

Montrons que T est continue

$\forall g \in E$ et $\forall t \in [0,1]$

$$|T(g)(x)| = \left|\int_0^x g(t)\,dt\right| \quad x \in [0,1]$$
$$\leq \int_0^x |g(t)|\,dt \quad x \in [0,1]$$
$$\leq \int_0^1 |g(t)|\,dt \quad \text{car } 0 \leq x \leq 1$$

~~$\forall g \in E,\ |g(t)| \leq \|g\|$~~

$$|T(g)(x)| \leq \|g\|_1 \Rightarrow \int_0^1 |T(g)(x)|\,dx \leq \|g\|_1$$
$$\Rightarrow \|T(g)\|_1 \leq \|g\|_1$$

T(g) est continue.

3) $f_n(x) = ne^{-nx}$, $\forall x \in [0,1]$

$n \geq 1$ et $f_n \in E$

i) Calculons la norme de $f_n(x)$.

* Pour $\|f_n\|_1$

$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |ne^{-nx}|\,dx$ comme $ne^{-nx} > 0$ $\forall x \in [0,1]$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 n e^{-nx} dx$$
$$= \left[-e^{-nx}\right]_0^1$$
$$= -e^{-n} + 1.$$

$$\underline{\|f_n\|_1 = -e^{-n} + 1}.$$

$$* \; \|T(f_n)\|_1 = \int_0^1 \left| \int_0^x n e^{-nt} dt \right| dx.$$
$$= \int_0^1 \left| \left[-e^{-nt}\right]_0^x \right| dx$$
$$= \int_0^1 -e^{-nx} + 1 \, dx$$
$$= \left[\frac{e^{-nx}}{n} + x\right]_0^1$$
$$= \frac{e^{-n}}{n} + 1 - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{e^{-n} + n - 1}{n}.$$

$$\boxed{\|T(f_n)\|_1 = \frac{e^{-n} + n - 1}{n}}$$

ii) Determinon la norme de T.

$\|T(f)\| = \min\{c>0 : \|T(f)\|_1 \leq c\|f\|_1\} \; \forall f \in E$

Pour $\|f\|_1 = 1$ en particulier.

$$\|T(f)\| \leq \frac{\|T(f)\|_1}{\|f\|_1 \to 1} \leq 1$$

Reciproquement.

$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto$

EXERCICE 4

(X, d) un espace métrique et $a \in X$.

$$\forall (x,y) \in X \times X;\ d_a(x,y) = \begin{cases} d(x,a) + d(y,a) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

1) i) $\forall (x,y) \in X \times X$;

si $x = y \Rightarrow d_a(x,y) = 0 \in \mathbb{R}_+$.

si $x \neq y \Rightarrow d_a(x,y) = d(a,x) + d(a,y)$

Comme $d(a,x), d(a,y) \in \mathbb{R}_+$, alors $d(a,x) + d(a,y) \in \mathbb{R}_+$.

$\forall (x,y) \in X \times X;\ d_a(x,y) \in \mathbb{R}_+$.

ii) $\forall (x,y) \in X \cdot X$.

si $x = y \Longrightarrow d_a(x,y) = 0$

si $x \neq y \Longrightarrow d_a(x,y) = d(a,x) + d(a,y)$:

si $x = a$ alors $a \neq y$ Donc $d_a(x,y) = d(a,y) \neq 0$

si $y = a$ alors $a \neq x$ Donc $d_a(x,y) = d(a,x) \neq 0$

si $x \neq a$ et $y \neq a$; $d_a(x,y) = d(a,y) + d(a,x) \neq 0$

$\forall (x,y) \in X \cdot X;\ d_a(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $\forall (x,y) \in X \cdot X$

$$d_a(x,y) = d(a,x) + d(a,y)$$
$$= d(a,y) + d(a,x) = d_a(x,y).$$

Donc $d_a(x,y) = d_a(y,x)$

iv) Soient x, y et $z \in X$.

1^{er} cas : $x = z$

$d_a(x,z) = 0 \leq d_a(x,y) + d_a(y,z)$.

2^e cas : $x \neq z$

- Si $x = y \Rightarrow y \neq z$. Donc $d_a(x,z) = d_a(y,z) \neq 0$
- Si $y = z \Rightarrow x \neq y$ Donc $d_a(x,z) = d_a(x,y) \neq 0$

Si $x \neq y$ et $y \neq z$

$$d_a(x,y) + d_a(y,z) = d(a,x) + d(a,y) + d(a,y) + d(a,z)$$
$$= d(a,x) + d(a,z) + 2d(a,y)$$
$$= d_a(x,z) + 2d(a,y) \geq d_a(x,z)$$

Dans tous les cas, l'inegalité triangulaire est verifieé.

Conclusion : $d_a(x,y)$ est une distance sur X.

2) Soit $x \in B_{d_a}(a,r) \Rightarrow d_a(x,a) < r$

$$\Rightarrow d(x,a) + d(a,a) < r$$
$$\Rightarrow d(x,a) < r \Rightarrow x \in B_d(a,r).$$

Reciproquement.

$$y \in B_d(a,r) \Rightarrow d(a,y) < r$$
$$\Rightarrow d(a,y) + d(a,a) < r \quad (d(a,a) = 0)$$
$$\Rightarrow d_a(a,y) < r$$
$$\Rightarrow y \in B_{d_a}(a,r).$$

Conclusions $B_d(a,r) = B_{d_a}(a,r)$.

3) Soit $x \in X$ tel que $x \neq a$.

$$y \in B_{d_a}(x,r) \Rightarrow d_a(x,y) < r$$
$$\Rightarrow d(x,a) + d(y,a) < r$$

Posons $r = d(x,a)$.

Donc $d(y,a)+d(y,a) = d_a(x,y) \geq r = d(a,x)$.

$y \notin B_{d_a}(x,r) \Rightarrow B_{d_a}(x,r) = \{x\}$.

4) Soit $A \subset X$

i) supposons que $a \notin A$.

$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$.

D'apres (3) si $r = d(a,x)$, alors $\{x\} = B_{d_a}(a,x)$. Donc

$A = \bigcup_{x \in A} B_{d_a}(a,x)$.

A est ouvert comme reunion d'ouvert.

ii) soit $a \in A$

supposons que A est ouvert pour d_a.

$\forall x \in A ; \exists r > 0 / B_{d_a}(x,r) \subset A$

Comme $a \in A$, on a $B_{d_a}(a,r) \subset A$

On sait que $B_{d_a}(a,r) = B_d(a,r)$ Donc $B_d(a,r) \subset A$. A est donc

A contien un ouvert qui contien a.

Voisinage de a.

Reciproquement:

EXAMEN DE TOPO (session 2) 18-19

EXERCICE 1

Soit X, un ensemble non vide, munit de la topologie discrète.

1) $P(X)$ sont les parties fermées de X.

2) soit $A \subset X$.

i) $\mathring{A} = A$ car A est ouvert

ii) $\bar{A} = A$ car A est fermé

3) Toutes les parties de X contenant x sont voisinage de x.

L'ensemble des parties de X contenant x, est l'ensemble du voisinage de x.

EXERCICE 2

(X, d) un espace metrique.

1) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de cauchy de X.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \; p \geq q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

On note $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ la sous-suite de (x_n) telle que

$x_{\phi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

ϕ est une application strictement croissante sur $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}; \; \phi(n) \geq n$.

Comme $x_{\phi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} \ell$, alors

8 $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_0 \Rightarrow d(x_{\phi(n)}; \ell) < \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N} / n \geq N_\varepsilon$ alors $\phi(n) \geq n \geq N_\varepsilon$.

Comme (x_n) est de cauchy, on $d(x_{\phi(n)}; x_n) < \varepsilon$.

Posons : $M = \max\{N_\varepsilon, n_0\}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq M \Rightarrow d(x_{\phi(n)}, x_n) < \varepsilon$

$\Rightarrow d(x_{\phi(n)}, x_n) < \varepsilon$.

$d(x_{\phi(n)}, \ell) + d(x_{\phi(n)}, x_n) < 2\varepsilon \Rightarrow$

$d(x_n, \ell) < 2\varepsilon$.

Conclusion: $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, \ell) = 0$.

2) Soit (X, d) compact.

note $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de cauchy dans X.

Comme X est compact, il va existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ de x_n, telle que $x_{\phi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} \ell \in X$

D'après (1) toute suite de cauchy converge vers la même limite que sa sous-suite.

Cela entraine que $x_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell \in X$.

(X, d) est donc complet.

Exemple.

$(\mathbb{R}, | \, |)$ est complet mais n'est pas compact.

EXERCICE 3

$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose : $d(p, q) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{si } p = q \end{cases}$

1) i) $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$.

- Si $p = q \Rightarrow d(p,q) = 0 \in \mathbb{R}_+$
- Si $p \neq q \Rightarrow 0 < \frac{1}{p} \leq 1$ et $0 < \frac{1}{q} \leq 1$

$$\Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 3$$

$$\Rightarrow d(p,q) \in]1,3] \subset \mathbb{R}_+.$$

$$\Rightarrow d(p,q) \in \mathbb{R}_+.$$

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ d(p,q) \in \mathbb{R}_+$

ii) soient $p, q \in \mathbb{N}^*$.

- $p = q \Rightarrow d(p,q) = 0$
- $p \neq q \Rightarrow d(p,q) \in]1,3]$

$$\Rightarrow d(p,q) \neq 0.$$

Donc $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ p = q \Leftrightarrow d(p,q) = 0$

iii) soit $p, q \in \mathbb{N}^*$

- $p = q \Rightarrow d(p,q) = 0 = d(q,p)$
- $p \neq q \Rightarrow d(p,q) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$$= 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = d(q,p).$$

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ d(p,q) = d(q,p)$

iv) soient $m, n, k \in \mathbb{N}^*$

1er cas : $m = n$.

$d(m,n) = 0 \leq d(m,k) + d(k,m)$.

2e cas : $m \neq n$

- Si $m = k \Rightarrow k \neq n$

$$\Rightarrow d(m,n) = d(k,n) \neq 0$$

- si $k = n \Rightarrow m \neq k$
$\Rightarrow d(m,n) = d(k,n) \neq 0$

- si $k \neq n$ et $m \neq k$

$d(k,n) + d(m,k) = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{k}$
$= 1 + \frac{2}{k} + d(n,m) > d(n,m)$

Donc $\forall\, n,m,k \in \mathbb{N}^*$.
$d(n,m) \leq d(n,k) + d(k,m)$.

d est bien une distance sur $\mathbb{N}^*$

2) $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$
$p \longmapsto p+1$.

i) supposons que $p \neq q$.

$\frac{1}{1+q} < \frac{1}{q}$ et $\frac{1}{1+p} < \frac{1}{p} \Rightarrow$

$1 + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+p} < 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \underline{d(f(p), f(q)) < d(p,q)}$.

ii) Supposont que f est contractante.
Comme $(\mathbb{N}^*, d)$ est complet, d'apres le Théorème des points fixe, $\exists!\, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(m) = m$.

$f(m) = m \Rightarrow 1 + m = m$
$\Rightarrow 1 = 0$ absurde.

f n'est pas contractante.

$\boxed{\text{EXERCICE 4}}$

$E = \mathbb{R}[X]$

$\forall P \in E$, on pose :

$$N_1(P) = \sup_{x \in [1,2]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P|.$$

enfin $\phi(P) = P(0)$.

1) i) $\forall P \in E$; P est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $[0,1] \subset \mathbb{R}$, P est aussi continue sur $[0,1]$ qui compact.

$\exists x_0 \in [0,1]$ tel que $|P(x_0)| = \sup_{t \in [0,1]} |P(x)| \in \mathbb{R}_+$.

ii) $\forall P \in E$

$$N_2(P) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| = 0$$

$$\Rightarrow |P(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow P(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

Reciproquement.

$\forall x \in [0,1]$, $P(x) = 0 \Rightarrow |P(x)| = 0 \quad x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| = 0$$

$$\Rightarrow N_2(P) = 0.$$

$\forall P \in E$; $\underline{N_2(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0}$

iii) $\forall P \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$N_2(\lambda P) = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda P(x)|$$

$$= \sup_{x \in [0,1]} |\lambda||P(x)|$$

$$= |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$$

$$= \underline{|\lambda| N_2(P)}.$$

iv) soient $P, Q \in E$.

$\forall x \in [0,1]$; $|P(x)+Q(x)| \leq |P(x)|+|Q(x)|$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |Q(x)| \Rightarrow$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |P(x)+Q(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |Q(x)| \Rightarrow$$

$$\underline{N_2(P+Q) \leq N_2(P)+N_2(Q)}$$

Conclusion: N_2 est une norme sur E.

2) * Montrons que ϕ est linéaire. sur (E, N_2)

Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\phi(\lambda P+Q)(x) = (\lambda P+Q)(0)$$
$$= \lambda P(0) + Q(0)$$
$$= \underline{\lambda \phi(P)(x) + \phi(Q)(x)} \quad \forall x \in [0,1].$$

ϕ est linéaire.

* Montrons que ϕ est continue.

$\forall P \in E$; $\phi(P(x)) = P(0) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in [0,1]$.

ϕ est à valeur dans $\mathbb{R}$. Donc

$\forall P \in E$.

$$|\phi(P)(x)| = |P(0)| \quad \forall x \in [0,1]$$
$$\leq \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$
$$\leq \underline{N_2(P)}.$$

ϕ est donc continue sur E.

3) Calculons la norme de Φ.

$\|\Phi\| = \min\{c>0 : |\Phi(P)(x)| \leq c N(P) \ \forall P \in E \text{ et } x \in [0,1]\}$.

En particulier, pour $N(P) = 1$ on a :

$\|\Phi\| \leq 1$ (1)

Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 1$.

$N_2(g) = 1$ et $|\Phi(g)(x)| = |g(0)| = 1$.

$1 \leq \|\Phi(g)\| \Rightarrow \underline{\|\Phi\| = 1} \ \forall P \in E$.

~~4) Supposons que Φ est continue sur (E, N_1)~~
~~C'est-à-dire $\forall P \in E$, $\lim_{n \to +\infty} N(\Phi(P)) = 0$.~~
~~Soit $P_n(t) = (1 - \frac{t}{2})^n$, $n \geq 1$.~~
~~$\Phi(P_n(t)) = P_n(0) = 1$~~
~~$N(\Phi(P_n)) = N(1) = 1 \neq 0$. absurde.~~
~~Φ n'est pas continue sur (E, N_1)~~

4) Montrons que Φ n'est pas continue sur (E, N_1)

Supposons que Φ est continue sur (E, N_1).

Supposont que Φ est linéaire donc $\forall P \in E$.

Comme Φ est linéaire, donc $\forall P \in E$.

$|\Phi(P)| \leq k N_1(P)$ avec $k \in]0, +\infty[$.

Soit $P_n(t) = (1 - \frac{t}{2})^n$

$|\Phi(P_n)(t)| = |\Phi(P_n)(0)| = 1$.

$N_1(P_n) = \sup_{t \in [0,1]} |P_n(t)|$

$$P_n'(t) = n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{t}{2}\right)^{n-1}$$
$$= -\frac{1}{2}n\left(1-\frac{t}{2}\right)^{n-1}.$$

$P_n'(t)$ est decroissante Donc $N_1(P_n) = P_n(1) = \frac{1}{2^n}$.

Par hypothèse; ϕ est continue sur (E, N_1) Donc

$1 \leq k\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Pour n tend vers $+\infty$

$1 \leq 0$ absurde.

ϕ n'est pas continue dans (E, N_2).

5) Considerons toujours $P_n(t) = \left(1-\frac{t}{2}\right)^n$.

$$N_2(P_n) = \sup_{t\in[0,1]}\left(1-\frac{t}{2}\right)^n$$
$= 1$ car $\left(1-\frac{t}{2}\right)^n$ est decroissante sur $[0,1]$.

Supposons que N_1 et N_2 sont equivalentes.

$\exists\ \alpha>0$ telle que $\forall\ P \in E$

$$N_2(P) \leq \alpha N_1(P) \Rightarrow N_2(P_n) \leq \alpha N_1(P_n)$$
$$\Rightarrow 1 \leq \alpha \frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow 2^n \leq 1$$

Pour n tend vers $+\infty$; $+\infty \leq 1$ absurde.

Donc N_1 et N_2, sont pas equivalentes.

---

c) $B = \{P \in E : P(0) \neq 0\}$

i) Soit $Q \in B_{N_2}(P, r) \Rightarrow N_2(Q-P) < r$
$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |(Q-P)(x)| < r$$

$\Rightarrow |Q(x) - P(x)| < r \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow |Q(x)| - |P(x)| < r$

$\Rightarrow |Q(x)| < r + |P(x)|$

$\Rightarrow |Q(x)| < |P(0)| + |P(x)| \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow |Q(0)| < |P(0)| + |P(x)| . \quad \forall x \in [0,1]$

Comme $|P(0)| \neq 0 \Rightarrow |Q(0)| \neq 0$

$\Rightarrow Q(x) \in U$.

ii) U est un ouvert dans (E, N_2).

EXAMEN DE TOPO (Session 1) 19 - 20

EXERCICE 1

(E,d) un espace metrique. $f: E \to E$ une application telle que $f^2 = f \circ f$ est contractante.

1) f^2 contractante si $\exists k \in]0,1[$ tel que $\forall (x,y) \in E$.

$d(f^2(x), f^2(y)) \leq k d(x,y)$

2) E est complet et f est contractante, d'apres le théorème des points fixes, $\exists ! x \in E /$

$f^2(x) = x$.

$f^2(x) = x \Rightarrow f \circ f(x) = x$

$\Rightarrow f \circ (f \circ f(x)) = f(x)$

$\Rightarrow (f \circ f) \circ f(x) = f(x)$

$\Rightarrow f^2 \circ f(x) = f(x)$.

$f(x)$ est aussi un point fixe pour f^2. Comme f^2 n'admet qu'un seul point fixe alors $f(x) = x$.

x est un point fixe de f.

Montrons que x est le seul point fixe de f.
Soit x et y deux points fixes de f tel que $x \neq y$.
Comme f^2 est contractante

$d(f^2(x), f^2(y)) \leq k d(x,y) < d(x,y) \Rightarrow$

$d(f(f(x)), f(f(y))) \leq k d(x,y) < d(x,y) \Rightarrow$

$d(f(x); f(y)) \leq k d(x,y) < d(x,y) \Rightarrow$

$d(x,y) \leq k d(x,y) < d(x,y) \Rightarrow$

$d(x,y) < d(x,y)$ absurde.

f admet donc un seul point fixe.

EXERCICE 2

(X,d), un espace metrique. $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ tel que $\exists k > 0$ tel que $\forall (a,b) \in A \times A$, $a \neq b \Rightarrow d(a,b) \geqslant k$.

1) Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de cauchy dans A.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $p \geqslant q \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

En particulier pour $\varepsilon = k$;

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p \geqslant q \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) = 0 < k$

$x_p = x_q$ $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$

(x_n) est donc stationnaire dans A.

$\exists$ $N_{\varepsilon+1} \in \mathbb{N} /$ $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_{N_{\varepsilon+1}} \in A$.

(A, d) est complet.

2) Soit (x_n) une suite d'element de A telle que

$x_n \longrightarrow l \in E$

(x_n) est donc une suite de Cauchy dans A.
A etant complet, cela entraine que la limite l de (x_n) est dans A.

<u>(A, d) est fermé</u>

3) Posons $A = \mathbb{N}$ et $k = 1$.
$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $a \neq b$, $|a-b| \geq 1$.

EXERCICE 3

(X, d) un espace metrique. $A \subset X$

1) Soit X est compact.
Soit $\varepsilon > 0$, Comme X est compact, il existe un ensemble de point fini $\{a_1, a_2 \cdots a_n\}$ dans X telque
$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon)$.
On peut donc trouver un ensemble de point fini $\{b_1, b_2 \cdots b_m\} \subset \{a_1, a_2 \cdots a_n\}$ tel que
$X = \bigcup_{i=1}^{m} B_f(b_i, \varepsilon)$ où $B_f(b_i, \varepsilon)$ designe la boule fermée de centre b_i et de rayon ε $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$.

X est donc precompact.

2) Supposons que A est precompact.
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\{a_1, a_2 \cdots a_n\} \subset A$ tel que
$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f(a_i, \varepsilon)$.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f(a_i,\varepsilon) \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B_f(a_i,\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_f(a_i,\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f(a_i,\varepsilon).$$

$\overline{A}$ est donc precompact.

EXERCICE 4

$E = \mathbb{R}[X]$.

$\forall\, P \in E;\ N(P) = \sup_{x \geq 0} e^{-x} |P(x)|$

$$T: E \longrightarrow E$$
$$P \longmapsto P(X+1)$$

1) $\forall\, P \in E$ et $\forall\, x \in [0,1]$

$e^{-x}|P(x)|$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$e^{-x} > 0$ et $|P(x)| \geq 0\ \forall\, x \in [0,+\infty[$ Donc

$0 \leq e^{-x}|P(x)| \Rightarrow 0 \leq \sup_{x\geq 0} e^{-x}|P(x)|$.

$\lim_{n\to+\infty} e^{-x}|P(x)| = 0$ Donc

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0 : \forall\, x \in [0,+\infty[,\ x \geq \alpha \Rightarrow e^{-x}|P(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, x \in]\alpha,+\infty[;\ e^{-x}|P(x)| < \varepsilon$.

$e^{-x}|P(x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc est aussi continue sur le compact $[0,\alpha]$.

$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, x \in [0,\alpha];\ e^{-x}|P(x)| < M$.

Posons $\mu = \mathrm{Max}\{\varepsilon; M\}$,

$\forall\, x \in [0,+\infty[;\ e^{-x}|P(x)| < \mu$

$e^{-x}|P(x)| < \mu \Rightarrow \sup_{x \geq 0} e^{-x}|P(x)| < M$

$\Rightarrow N(P) \in [0, M[\subset \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \underline{N(P) \in \mathbb{R}_+}$.

2) i) D'après la question (1), $\forall P \in E$, $N(P) \in \mathbb{R}_+$.

ii) Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N(\lambda P) = \sup_{x \geq 0} e^{-x}|\lambda P(x)|$$
$$= \sup_{x \geq 0} e^{-x}|\lambda||P(x)|$$
$$= |\lambda| \sup_{x \geq 0} e^{-x}|P(x)|$$
$$= \underline{|\lambda| N(P)}.$$

iii) Soit $P \in E$.

$N(P) = 0 \Rightarrow \sup_{x \geq 0} e^{-x}|P(x)| = 0$

$\Rightarrow e^{-x}|P(x)| = 0 \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow |P(x)| = 0 \quad \forall x \geq 0$ car $e^{-x} > 0$

$\Rightarrow \underline{P(x) = 0} \quad \forall x \geq 0$

Réciproquement

$\forall x \geq 0$. $P(x) = 0 \Rightarrow |P(x)| = 0$

$\Rightarrow \cancel{\sup_{x \geq 0} |P(x)|} = 0$

$\Rightarrow e^{-x}|P(x)| = 0 \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow \sup_{x \geq 0} e^{-x}|P(x)| = 0 \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow \underline{N(P) = 0}$.

$\forall P \in E$, $N(P) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$

iv) Soient P et $Q \in E$.

$|P(x)+Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \quad \forall x \in [0,+\infty[$

Comme $e^{-x} > 0 \quad \forall x \in [0,+\infty[$,

$$e^{-x}|P(x)+Q(x)| \leq e^{-x}|P(x)| + e^{-x}|Q(x)| \quad \forall x \geq 0$$

$$\leq \sup_{x\geq 0} e^{-x}|P(x)| + \sup_{x\geq 0} e^{-x}|Q(x)|$$

$$\sup_{x\geq 0} e^{-x}|P(x)+Q(x)| \leq N(P)+N(Q)$$

$$\underline{N(P+Q) \leq N(P)+N(Q)}$$

Conclusion: N est une norme sur E.

3) Soient $(P,Q) \in E\times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$T(\lambda P+Q)(x) = (\lambda P+Q)(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$= \lambda P(x+1) + Q(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$= \underline{\lambda T(P)(x) + Q(x)} \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$

T est lineaire.

4) $N(T(P)) = \sup_{x\geq 0} e^{-x}|P(x+1)|$

Posons: $t = x+1 \Rightarrow -x = 1-t$

$x \to 0 \Rightarrow t \to 1$.

$$N(T(P)) = \sup_{t\in[1,+\infty[} e^{-t+1}|P(t)|$$

$$= e \sup_{t\in[1,+\infty[} e^{-t}|P(t)|.$$

Soit $A = \{e^{-t}|P(t)| \; ; \; t \in [1,+\infty[\}$.

$B = \{e^{-t}|P(t)| ; \; t \in]0,+\infty[\}$.

$A \subset B \Rightarrow \sup_{t\in[1,+\infty[} A \leq \sup_{t\in]0,+\infty[} e^{-t}|P(t)|$.

$N(T(P)) \leq e N(P)$.

EXAMEN DE TOPO (SESSION 2) 19-20.

EXERCICE 1

Soit (E,d) un espace métrique.

1) Supposons que $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans E.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(U_p, U_q) < \varepsilon$

Posons $\varepsilon = 3$.

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(U_n, U_{N_\varepsilon+1}) < 3$

$\Rightarrow U_n \in B(U_{N_\varepsilon+1}, 3)$

Posons : $M = \sup\{d(U_k, U_{N_\varepsilon+1}) ; 0 \leq k < N_\varepsilon\}$

$\forall k \in [0; N_\varepsilon[; \ d(U_k, U_{N_\varepsilon+1}) \leq M < M+1$.

Posons $\mu = \max\{3; M+1\}$

$\forall n \in \mathbb{N} ; \ d(U_n, U_{N_\varepsilon+1}) < M+1$.

$(U_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

Réciproque.

2) Supposons que $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \cdot \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(U_p, U_q) < \varepsilon$.

Soit $(U_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ une sous-suite de (U_n) telle que

$U_{\phi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} l$ dans E

$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application croissante telle que

(22) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \phi(n) \geq n$.

Comme $U_{\phi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ et $\varepsilon > 0$

$\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow d(U_{\phi(n)}, \ell) < \varepsilon$..

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \phi(n) \geq n \geq N_\varepsilon$.

Comme (U_n) est de Cauchy alors, $d(U_{\phi(n)}, U_n) < \varepsilon$.

Posons $M = \text{Max}\{N'_\varepsilon \text{ et } N_\varepsilon\}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq M \Rightarrow$

$d(U_{\phi(n)}, U_n) < \varepsilon$ et

$d(U_{\phi(n)}, \ell) < \varepsilon$

Donc $d(U_n, \ell) \leq d(U_n, U_{\phi(n)}) + d(U_{\phi(n)}, \ell)$

$\leq 2\varepsilon$.

Conclusion : $(U_n) \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

3) designons par $B_f(x,r)$, la boule fermée de centre x et de rayon r. $\forall x \in E$.

supposons que $B_f(x,r)$ est compact.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de cauchy dans E.

$(x_n) \in B_f(x_n, r)$ qui est compact.

$\exists$ $x_{\phi(n)}$, une sous-suite de (x_n) telle que

$x_{\phi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} \ell \in B_f(x_n, r)$.

D'apres la question 2, toute suite de cauchy converge vers la même limite que sa sous-suite.

Par consequent, $x_n \longrightarrow \ell \in B_f(x_n, r) \subset E \Rightarrow$
$\ell \in E$.

Donc (E,d) est complet.

$\boxed{\text{EXERCICE 2}}$

(X,d) un espace metrique.

$(a_n)_{n\geq 0} \in X$ / $a_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell \in X$.

montrons que $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact de X.

Soit $\{O_i;\ i \in I \in \mathbb{N}\}$ une famille d'ouvert de E, telle que

$K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.

il va existé $k \in I$ tel que $\ell \in O_k$.

$\ell \in O_k \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0;\ B(\ell, \varepsilon) \subset O_k$.

Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a_n, \ell) = 0$

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(a_n, \ell) < \varepsilon$
$\Rightarrow a_n \in B(\ell, \varepsilon) \subset O_k$

Donc $\forall n \in [N_\varepsilon, +\infty[$, $a_n \in O_k$.

Soit $n \in [0, N_\varepsilon[$

Comme $\{O_i, i \in I\}$ recouvre K; $\forall n \in [0, N_\varepsilon[$.

il va exister un $i_n \in I$ telle que $a_n \in O_{i_n}$

$\forall n \in [0, N_\varepsilon[$, $a_n \in \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon - 1} O_{i_n}$

$K = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon - 1} O_{i_n} \cup O_k \subset \bigcup_{i \in I} O_i$

K est donc compact

EXERCICE 3

$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose :

$$d(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

Posons : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$.

Donc $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$.

1) i) L'application f est continue sur $\mathbb{R}$, en faite $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + |x| > 0$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $f(x) \in \mathbb{R}$ et $f(y) \in \mathbb{R}$ ⇒

Cela entraine que $f(x) - f(y) \in \mathbb{R}$ Donc

$d(x,y) = |f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}_+$.

ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$d(x,y) = |f(x) - f(y)|$
$= |f(y) - f(x)| = d(y,x)$.

iii) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$d(x,z) = |f(x) - f(z)|$$
$$= |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)|$$
$$\leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|$$
$$\leq \underline{d(x,y) + d(y,z)}.$$

iv) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0$$
$$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = f(y).$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}.$$

$\frac{x}{1+|x|}$ et $\frac{y}{1+|y|}$ sont du même signe.

Comme $1+|x| > 0$ et $1+|y| > 0$, alors le signe de $\frac{x}{1+|x|}$ est celui de x et le signe de $\frac{y}{1+|y|}$ est celui de y.

x et y sont donc du même signe.

Donc $d(x,y) = 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{1+|x|}\right| = \left|\frac{y}{1+|y|}\right|$

$$\Rightarrow \frac{|x|}{|1+|x||} = \frac{|y|}{|1+|y||}$$
$$\Rightarrow |x|(1+|y|) = |y|(1+|x|)$$
$$\Rightarrow |x| + |xy| = |y| + |xy|$$
$$\Rightarrow |x| = |y|$$

Comme x et y sont du même signe, alors

$$\underline{d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y}.$$

Conclusion : d est donc une distance sur $\mathbb{R}$.

2) Designons par $B(0,r)$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon r sur $\mathbb{R}$.

$$B(0,r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,0) < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1+|x|} < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| < r(1+|x|)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : |x|(1-r) < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{r}{1-r}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \ \frac{r}{r-1} < x < \frac{r}{1-r}\}.$$

Si $r = 1$: $B(0,r) = \mathbb{R}$.

si $r \in]0,1[$: $B(0,r) =]\frac{r}{r-1} ; \frac{r}{1-r}[$.

si $r > 1$: $B(0,r) = \emptyset$.

EXERCICE 4

$E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. $\forall f \in E$, $f(0) = 0$,

$N_1(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $N_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$

1) i) Soit $f \in E \Rightarrow f'$ est continue sur $[0,1]$.
Comme $[0,1]$ est ~~conn~~ compact de $\mathbb{R}$, f' est donc bornée et atteind ces bornes sur $[0,1]$.
$\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [0,1]$ $|f'(x)| \leq M$
$|f'(x)| \leq M \Longrightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \leq M$
$N_2(f) \in \mathbb{R}_+$ $\forall f \in E$.

ii) Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda f'(x)|$$

$$= \underline{\lambda N_2(f)}.$$

iii) $\forall f \in E$

$$N_2(f) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = 0$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \int_0^x f'(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = 0} \quad \forall x \in [0,1].$$

iv) soient f et $g \in E$

$$|(f+g)'(x)| = |f'(x) + g'(x)| \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\leq |f'(x)| + |g'(x)| \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\leq \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g'(x)| \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |(f+g)'(x)| \leq N_2(f) + N_2(g) \Rightarrow$$

$$\underline{N_2(f+g) \leq N_2(f) + N_2(g)}.$$

N_2 est une norme sur E.

2) $\forall x \in [0,1]$

$$1 \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \sup_{\substack{x,y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

$\Rightarrow |f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$

$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$

$\Rightarrow N_1(f) \leq N_2(f)$.

$\underline{C = 1}$

3) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

* $N_1(f_n) = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^n}{n}\right|$

$= \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^n}{n}$

$= f_n(1) = \frac{1}{n}$ car f_n est croissante.

* $N_2(f_n) = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^n}{n}'\right|$

$= \sup_{x\in[0,1]} |x^{n-1}|$

$= \sup_{x\in[0,1]} x^{n-1}$

$= 1$ car x^{n-1} est croissante sur $[0,1]$.

Supposons que N_1 et N_2 sont equivalentes.

$\exists \alpha > 0 \,/\, \forall f \in E$;

$N_2(f) \leq \alpha N_1(f)$

En posant que $f = f_n(x)$ on a :

$1 \leq \alpha \frac{1}{n} \Rightarrow n \leq \alpha$.

Pour $n \to +\infty \Rightarrow +\infty \leq \alpha$ absurde.

 N_1 et N_2 sont pas equivalentes.

EXAMEN DE TOPO (Se 1) 20-21

EXERCICE 1

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*;\ d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

1) Designons par $B(3,1)$, la boule ouverte de centre 3 et de rayon 1.

$$B(3,1) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,3) < 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -1 < \frac{1}{x} - \frac{1}{3} < 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -1 + \frac{1}{3} < \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{3}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{4}{3}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < 0 \text{ ou } \frac{1}{x} < \frac{4}{3}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 < -\frac{1}{x} < \frac{2}{3} \text{ ou } \frac{1}{x} < \frac{4}{3}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 < -\frac{1}{x} < \frac{2}{3} \text{ ou } x > \frac{3}{4}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -x > \frac{2}{3} \text{ ou } x > \frac{3}{4}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{2}{3} \text{ ou } x > \frac{3}{4}\}$$
$$= \underline{]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]\frac{3}{4}, +\infty[}.$$

2) $\forall\ x, y \in]0,1]$,

$x \neq y \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| > 0.$

On peut donc trouver $k \in]0,+\infty[$ tel que

30 $\forall (x,y) \in]0,1]^2$, si $x \neq y$ alors $d(x,y) \geq k$.

EXERCICE 3

$a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$

$E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f,g) \longmapsto \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

1) $\forall x \in [a,b]$ et $\forall f, g \in E$,

$f(x) \in \mathbb{R}$ et $g(x) \in \mathbb{R}$ donc, $f(x) - g(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in [a,b]$

$\forall x \in [a,b]$; $g(x) - f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - g(x)| \in \mathbb{R}_+$ $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \in \mathbb{R}_+ .$$

$$\Rightarrow \underline{d(f,g) \in \mathbb{R}_+}$$

ii) $\forall x, y \in [a,b]$ et $\forall f$ et $g \in E$.

$\cancel{d(f,g)}$ $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \Rightarrow$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)| \Rightarrow$$

$$\underline{d(f,g) = d(g,f)} .$$

iii) Soient f et $g \in E$.

$d(f,g) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = 0$

$\Rightarrow |f(x) - g(x)| = 0$ $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \underline{f(x) = g(x)}$ $\forall x \in [a,b]$

Reciproquement :

$\forall x \in [a,b]$, $f(x) = g(x) \Longrightarrow |f(x) - g(x)| = 0$ $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow d(f,g) = 0$

iv) $\forall f, g, h \in E$.

$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$|f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)| \Rightarrow$

$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$.

d est une distance sur E.

2) $k : [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une applicat° continue, $\phi \in E$.

$\forall f \in E$ et $\forall r > 0$, on définit:

$\Phi_r(f)(x) = r \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy + \phi(x)$.

a) Soit $f \in E$ et $(x,y) \in [a,b]^2$.

$k(x,y) f(y)$ est une application continue sur $[a,b]$ car $k(x,y)$ et $f(y)$ sont continues sur $[a,b] \times [a,b]$.

Donc $r \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy$ est continue sur $[a,b]$.

Comme $\phi(x)$ est continue $\forall x \in [a,b]$,

$\Phi_r(f)(x) = r \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy + \phi(x)$ est continue sur $[a,b]$

est est à valeur dans $\mathbb{R}$.

$\Phi_r(f)(x) \in E$; $\forall f \in E$.

b) Soient f et $g \in E$

$|\Phi_r(f)(x) - \Phi_r(g)(x)| = \left| r \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy - r \int_a^b k(x,y)\, g(y)\, dy \right|$

$$= r\left|\int_a^b k(x,y)(f(y)-g(y))\,dy\right|$$

$$\leq r\int_a^b |k(x,y)||f(y)-g(y)|\,dy$$

$$\leq r\,d(f,g)\int_a^b |k(x,y)|\,dy.$$

$k(x,y)$ est continue sur $[a,b]$ qui est compact.

$\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $|k(x,y)| \leq M$

Car k est bornée sur $[a,b]^2$. Donc

$|\Phi_r(f)(x) - \Phi_r(g)(x)| \leq r\,d(f,g)\,M(b-a) \Rightarrow$

$d(\Phi_r(f), \Phi_r(g)) \leq rM(b-a)\,d(f,g)$.

$rM(b-a) \in \mathbb{R}_+$, Donc Φ_r est lipschitzienne.

c) Φ_r est contractante ssi $0 < rM(b-a) < 1$

$$\Leftrightarrow 0 < r < \frac{1}{M(b-a)}$$

$$\Leftrightarrow r \in \left]0; \frac{1}{M(b-a)}\right[.$$

d) $f(x) = \Phi_r(f)(x)$ qui contractante sur (E,d) qui lui est complet.

D'après le Théorème des points fixe, ~~f(x) admet~~

~~une seu~~ $\exists$ un unique $f \in E$ /

$\Phi_r(f)(x) = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ admet un unique solution dans $[a,b]$.

Exo4 $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé.

Supposons que C est convexe,

Montrons que $\overline{C}$ est convexe.

Soient $x, y \in \overline{C}$, alors, il va exister $x_n \in C$ et $y_n \in C$ deux suites telles que $x_n \xrightarrow[+\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[+\infty]{} y$.

Comme C est convexe, alors $(1-t)x_n + ty_n \in C$.

Donc $(1-t)x_n + ty_n$ est une suite d'element de C telle que.

$$((1+t)x_n + ty_n) \xrightarrow[+\infty]{} (1+t)x + ty \in \overline{C}$$

Donc $(1+t)x + ty \in \overline{C}$.

$\overline{C}$ est convexe.

EXAMEN DE TOPOLOGIE (Session 2)

2020 - 2021

EXERCICE 1

1) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ avec $x \in \mathbb{R}$

Montrons que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| \leq \frac{|(x-y) + (x|y| - y|x|)|}{|(1+|x|)(1+|y|)|}.$$

$x|y| - y|x| \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \leq |x-y|.$$

Conclusion: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$.

2) Soit $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Montrons que $g(x)$ est bornée.

Soit $\varepsilon > 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 \iff \exists N_\varepsilon ; \forall x \in \mathbb{R},\ x < N_\varepsilon \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0 \iff \exists N_\varepsilon' ; \forall x \in \mathbb{R},\ x > N_\varepsilon' \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$

Donc $\forall x \in]-\infty, N_\varepsilon[\cup]N_\varepsilon', +\infty[\Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$

Soit $x \in [N_\varepsilon, N_\varepsilon']$.

Comme $g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $g(x)$ est continue sur $[N_\varepsilon, N_\varepsilon']$ qui est un compact de $\mathbb{R}$. Donc $g(x)$ est bornée sur

$[N_1, N_1']$.

$\exists\, M > 0 \,/\, \forall\, x \in [N_1, N_1']$; $|g(x)| < M$.

Posons $\mu = \text{Max}\{M ; \varepsilon\}$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| < \mu$.

$g(x)$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2.

$E = C([0,1], \mathbb{R})$. On definit sur $E \times E$:

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \quad \text{et} \quad \delta(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\,dx.$$

1) Montrons que δ est une distance sur E

i) $\forall$ $f(x)$, $g(x) \in E$; $|f(x) - g(x)| + 1 > 0$ et $|f(x) - g(x)| \geq 0$.

Donc $\dfrac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}$ est bien definie sur E ~~et~~ et à valeur dans $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Donc } \delta(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\,dx \in \mathbb{R}_+$$

ii) $\forall$ f et $g \in E$ et $x \in [0,1]$

$$|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \iff \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} = \frac{|g(x) - f(x)|}{1 + |g(x) - f(x)|}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\,dx = \int_0^1 \frac{|g(x) - f(x)|}{1 + |g(x) - f(x)|}\,dx$$

$$\Rightarrow \delta(f, g) = \delta(g, f) \quad \forall\, f, g \in E.$$

iii) $\forall f, g \in E$ et $\forall x \in [0,1]$

$$S(f,g) = 0 \iff \int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,dx = 0$$

$$\iff |f(x)-g(x)| = 0$$

$$\iff \underline{f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1]}$$

IV) Soient f, g et h Trois points de E et $x \in [0,1]$.

Posons : $A = |f-g|$; $B = |f-h|$ et $C = |h-g|$.

On remarque que $A \leq B + C$.

$$\frac{A}{1+A} - \frac{B}{1+B} - \frac{C}{1+C} = \Omega.$$

$$\Omega = \frac{A}{1+A} - \left(\frac{B(1+C) + C(1+B)}{(1+B)(1+C)}\right)$$

$$= \frac{A}{1+A} - \left(\frac{B + BC + C + CB}{(1+B)(1+C)}\right)$$

$$= \frac{A(1+B)(1+C) - (1+A)(B+C+2BC)}{(1+A)(1+B)(1+C)}$$

$$= \frac{A - B - C - 2BC - ABC}{(1+A)(1+B)(1+C)}.$$

Comme $(1+A)(1+B)(1+C)$ est positif, alors le signe Ω est celui de $A - B - C - 2BC - ABC$.

D'apres la Remarque :

$$A \leq B + C \Rightarrow A - B - C \leq 0$$

Comme $-2BC$ et $-ABC$ sont negatifs, alors Ω

$A - B - C - 2BC - ABC \leq 0 \Rightarrow \Omega \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{A}{1+A} \leq \frac{B}{1+B} + \frac{C}{1+C}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{A}{1+A}\,dx \leq \int_0^1 \frac{B}{1+B}\,dx + \int_0^1 \frac{C}{1+C}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,dx \leq \int_0^1 \frac{|f-h|}{1+|f-h|}\,dx + \int_0^1 \frac{|h-g|}{1+|h-g|}\,dx$$

$$\Rightarrow \delta(f;g) \leq \delta(f,h) + \delta(h;g).$$

D'après les points i); ii); iii) et iv); δ est une distance sur E.

2) Mq d et δ sont équivalentes.

a) $\forall\ f;g \in E$ et $\forall\ x \in [0,1]$.

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} \leq |f(x)-g(x)| \Rightarrow \int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,dx \leq \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow \delta(f;g) \leq d(f;g).$$

b) $1+|f(x)-g(x)|$ est continue sur $[0,1]$.

Comme $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$, alors $\exists\ M > 0$ /

$\forall\ x \in [0,1]$; $1+|f(x)-g(x)| \leq M \Rightarrow$

$$\frac{1}{1+|f(x)-g(x)|} \geq \frac{1}{M} \Rightarrow$$

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} \geq \frac{1}{M}|f(x)-g(x)| \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,dx \geq \frac{1}{M}\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \Rightarrow$$

$$\delta(f,g) \geq \frac{1}{M} d(f,g).$$

D'après a) et b) ; $\frac{1}{M} d(f,g) \leq \delta(f,g) \leq d(f,g)$ où

M est un majorant de $1+|f(x)-g(x)|$.

d et δ sont donc equivalentes.

EXERCICE 3

Soit (E,d) un espace metrique.

1) Montrons que toute suite de cauchy de E est bornée.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de cauchy dans (E,d).

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$; $n \geq m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Posons : $\varepsilon = 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $n \geq N_\varepsilon \geq N_\varepsilon + 1 \Rightarrow d(x_n, x_{N_\varepsilon+1}) < 3$.

Soit $M = \max\{d(x_k; x_{N_\varepsilon+1});\ 0 \leq k \leq N_\varepsilon\}$

$\forall k \in [0; N_\varepsilon]$; $d(x_k; x_{N_\varepsilon+1}) \leq M < M+1$

Posons $\mu = \max\{M+1; 3\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $d(x_n, x_{N_\varepsilon+1}) \leq \mu \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

2) Supposons que toute boule fermeé de (E,d) est compacte.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de cauchy dans (E,d).

qui converge vers x.

D'après la ~~proposition ci-dessus,~~ question 1, toute suite de cauchy est bornée.

$\exists M>0 \,/\, \forall\, x_\varepsilon, x_k \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; \; n\in\mathbb{N}, \; d(x_\varepsilon, x_k) \leq M$ où

ε est fixe. $\Rightarrow (x_k)_{k\geq 0} \in B(x_\varepsilon; M)$.

D'après la proposition ci-dessus, $B(x_\varepsilon, M)$ est compact.

Comme $(x_k) \in B(x_0, M)$, on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(k)})$ de x_k telle que $x_{\phi(k)} \longrightarrow x' \in B(x_\varepsilon, M)$.

Or toute sous-suite d'une suite de cauchy, a la même limite que la suite de cauchy elle-même,

donc $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x' = x \Rightarrow x \in B(x_\varepsilon, M) \subset E$

$\Rightarrow x \in E$.

Donc (E, d) est complet.

EXERCICE 4

$E = C([0,1], \mathbb{R})$. On munit E de la norme :

$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. On considère sur E :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \forall\, x\in[0,1].$$

1) Φ est la primitive de f qui s'annulle en 0.

Donc $\Phi \in E$

2) *) Montrons que Φ est linéaire.

Soient f et $g \in E$ et $a \in \mathbb{R}$.

$$\Phi(af+g)(x) = \int_0^x (af+g)(t)\,dt = a\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt.$$

$\phi(af+g)(x) = a\phi(f)(x) + \phi(g)(x)$. ϕ est donc linéaire.

**) Continuité de Φ.

Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

$$\|\Phi(f)\| = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t)\,dt \right| dx$$

$$\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\leq \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

$$\leq \|f(t)\| \implies$$

$$\int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| dx \leq \int_0^1 \|f(t)\|\,dt$$

$$\leq \|f(t)\| \int_0^1 dt$$

$$\leq \|f(t)\| [t]_0^1$$

$$\leq \|f(t)\|$$

$\|\Phi(f)\| \leq \|f\|$.

ϕ est donc continue.

3) $f_n(x) = n e^{-nx}$

*) $\|f_n\| = \int_0^1 |n e^{-nx}|\,dx$

$$= \int_0^1 n e^{-nx}\,dx = \left[-e^{-nx}\right]_0^1 = -e^{-n} + 1.$$

7

$\|f_n\| = 1 - e^{-nx}$

$$* \ \|\phi(f_n)\| = \int_0^1 \left| \int_0^x n e^{-nt} dt \right| dx$$

$$= \int_0^1 \left[-e^{-nt} \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \left(-e^{-nx} + 1 \right) dx$$

$$= \left[x + \frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^1$$

$$= 1 + \frac{e^{-n}}{n} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n + e^{-n} - 1}{n}$$

4) $|||\Phi||| = 1$ (verifiez vous-même)